МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
теории функций и геометрии

_______*Семёнов Е.М.*
подпись, расшифровка подписи
25.05.2023 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.04.01 Ортогональные ряды

1. Код и наименование специальности:

01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Специализация: Современные методы теории функций в математике и механике

3. Квалификация выпускника: Математик. Механик. Преподаватель

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:

0503 теории функций и геометрии

6. Составители программы: Семенов Евгений Михайлович, д. ф.-м. н., профессор

7. Рекомендована: Научно-методическим Советом математического факультета ВГУ, протокол № 0500-06 от 25.05.2023 г.

8. Учебный год: 2026/2027 уч.год **Семестр(ы):** 8

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели освоения учебной дисциплины:

- ознакомление студентов с основными теоремами, проблемами и методами теории ортогональных рядов, которая занимает одно из центральных мест в анализе. Ортогональные ряды широко используются в различных разделах анализа.
- дать качественные математические и естественнонаучные знания, востребованные обществом.

Задачи учебной дисциплины:

- демонстрация на примерах математических понятий и методов сущности научного подхода, специфики математики, ее роли в развитии других наук;
- овладение студентами основными навыками применения ортогональных рядов в задачах анализа;
- выработка умений анализировать полученные результаты, решать типовые задачи, приобретение навыков работы со специальной математической литературой;
- формирование умений использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Учебная дисциплина Ортогональные ряды относится к дисциплинам по выбору части формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

Опирается на курсы: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ» и помогает студентам решать конкретные задачи, возникающие в различных разделах областях математики. Излагаются основные методы теории ортогональных рядов. Изучаются ортонормированные системы общего вида и важные конкретные системы, такие как системы Хаара, тригонометрическая система, система Радемахера.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1.	Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики.	ПК-1.1.	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий	Знать: - базовые понятия, полученные в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.
		ПК-1.2.	Умеет собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области теории функций	Уметь: собирать, обрабатывать, анализировать и обобщать результаты исследований в области теории функций.
		ПК-1.3.	Имеет практический опыт научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике	Владеть навыками: - практического проведения научно-исследовательской деятельности в математике, механике и информатике.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (*в соответствии с учебным планом)* — 3/108.

Форма промежуточной аттестации - экзамен.

13. Виды учебной работы

<table>
<tr><td rowspan="3" colspan="2">Вид учебной работы</td><td colspan="4">Трудоемкость</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Всего</td><td colspan="3">По семестрам</td></tr>
<tr><td>8 семестр</td><td>№ семестра</td><td>…</td></tr>
<tr><td colspan="2">Аудиторные занятия</td><td>50</td><td>50</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">в том числе:</td><td>лекции</td><td>16</td><td>16</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>практические</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>лабораторные</td><td>34</td><td>34</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостоятельная работа</td><td>22</td><td>22</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">В том числе: курсовая работа</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Форма промежуточной аттестации
(экзамен – 36 часов.)</td><td>36</td><td>36</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Итого:</td><td>108</td><td>108</td><td></td><td></td></tr>
</table>

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
		1. Лекции	
1.	Пространства l_p, l_∞, C_0, вложения.	Ортогональные ряды изучаются в конкретных банаховых пространствах, прежде всего в пространствах l_p.	
2.	Сепарабельность l_p.	Доказывается, что пространство l_p сепарабельно при $P<\infty$ и несепарабельно при $P=\infty$.	
3.	Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в l_p.	Изучаются сопряженные к l_p пространства.	
4.	Пространства L_∞ и L_p, вложения.	С помощью неравенства Гельдера изучается зависимость от p нормы элемента в пространствах l_p.	
5.	Сепарабельность L_p.	Доказывается, что пространство L_p сепарабельно при $P<\infty$ и несепарабельно при $P=\infty$.	
6.	Подпространства и изоморфизм, подпространства L_p.	Изучается понятие изоморфизма пространств и рассматриваются конкретные примеры изоморфных и изометричных пространств.	
7.	Дополняемые подпространства	Приводятся примеры дополняемых и недополняемых подпространств.	
8.	Дополняемость в L_p подпространства, порожденного дизъюнктной	Доказывается, что любое подпространство порожденное дизъюнктной системой функций дополняемо в L_p.	

	системой функций.		
9.	Система Радемахера.	Вводится система Радемахера и доказывается, что эти функции образуют ортонормированную систему.	
10.	Неравенство Хинчина (1,2).	Доказывается, что система Радемахера порождает в Lp подпространство изоморфное L_2.	
11.	Неравенство Хинчина в пространстве Орлича (1,2).	Приводится обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.	
12.	Дополняемость в Lp подпространства, порожденного системой Радемахера.	Доказывается, что подпространство, порожденное системой Радемахера, дополняемо в Lp с помощью ортогонального проектора.	
13.	Сходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд Радемахера сходится почти везде, если коэффициенты ряда принадлежат l_2	
14.	Расходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд по системе Радемахера расходится почти везде, если коэффициенты ряда не принадлежат l_2.	
15.	Пространства Радемахера.	Свойства подпространства, порожденного системой Радемахера.	
16.	Экстремальные свойства системы Радемахера.	Подробное изложение экстремальных свойств системы Радемахера.	
2. Лабораторные занятия			
1.	Пространства lp, l_∞, Co, вложения.	Ортогональные ряды изучаются в конкретных банаховых пространствах, прежде всего в пространствах lp.	
2.	Сепарабельность lp.	Доказывается, что пространство lp сепарабельно при $P<\infty$ и несепарабельно при $P=\infty$.	
3.	Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в lp.	Изучаются сопряженные к lp пространства.	
4.	Пространства L_∞ и Lp, вложения.	С помощью неравенства Гельдера изучается зависимость от p нормы элемента в пространствах lp.	
5.	Сепарабельность Lp.	Доказывается, что пространство Lp сепарабельно при $P<\infty$ и несепарабельно при $P=\infty$.	
6.	Подпространства и изоморфизм, подпространства Lp.	Изучается понятие изоморфизм пространств и рассматриваются конкретные примеры изоморфных и изометричных пространств.	
7.	Дополняемые подпространства	Приводятся примеры дополняемых и недополняемых подпространств.	
8.	Дополняемость в Lp подпространства, порожденного дизъюнктной системой функций.	Доказывается, что любое подпространство порожденное дизъюнктной системой функций дополняемо в Lp.	
9.	Система Радемахера.	Вводится система Радемахера и доказывается, что эти функции образуют ортонормированную систему.	
10.	Неравенство Хинчина (1,2).	Доказывается, что система Радемахера порождает в Lp подпространство изоморфное L_2.	
11.	Неравенство Хинчина в пространстве Орлича (1,2).	Приводится обобщение неравенства Хинчина на пространства Орлича.	

12.	Дополняемость в Lp подпространства, порожденного системой Радемахера.	Доказывается, что подпространство, порожденное системой Радемахера, дополняемо в Lp с помощью ортогонального проектора.	
13.	Сходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд Радемахера сходится почти везде, если коэффициенты ряда принадлежат l_2	
14.	Расходимость рядов Радемахера.	Доказывается, что ряд по системе Радемахера расходится почти везде, если коэффициенты ряда не принадлежат l_2.	
15.	Пространства Радемахера.	Свойства подпространства, порожденного системой Радемахера.	
16.	Экстремальные свойства системы Радемахера.	Подробное изложение экстремальных свойств системы Радемахера.	

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа
1.	Пространства последовательностей	6	-	12	8
2.	Пространства функций	6	-	12	8
3.	Свойства рядов Радемахера	4	-	10	6
	Итого:	16	-	34	22

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, лабораторные занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся. На лекциях излагается теоретический материал, на лабораторных занятиях решаются задачи по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях. Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение аудиторных занятий (лекций и лабораторных занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в течении семестра.

При изучении курса «Ортогональные ряды» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. При подготовке к лабораторным занятиям повторить основные понятия по темам, рассмотреть примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке или в системе «Электронный университет».

4. Рекомендуется следовать советам преподавателя, связанным с освоением предлагаемого материала, провести самостоятельный Интернет - поиск информации (видеофайлов, файлов-презентаций, файлов с учебными пособиями) по ключевым понятиям курса и ознакомиться с найденной информацией при подготовке к экзамену по дисциплине.

Важной составной частью освоения дисциплины являются лабораторные занятия, которые требуют помимо знаний теоретического материала еще и навыков решения практических задач, что помогает глубже усвоить учебный материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

Самостоятельная учебная деятельность предполагает выполнение следующих заданий:

1) самостоятельное изучение учебных материалов по разделам дисциплины с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем, выполнение практических заданий;

2) подготовку к текущим и промежуточной аттестациям.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания подлежат последующей проверке преподавателем. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	***Гуревич, Александр Петрович***. *Сборник задач по функциональному анализу / А. П. Гуревич, В. В. Корнев, А. П. Хромов .— Москва : Лань, 2012 .— 192 с. - // Изд-во «Лань» : ЭБС. - <URL:http://e.lanbook.com*
2	***Люстерник, Л. А.*** *Краткий курс функционального анализа [Текст] : .— Москва : Лань, 2009 .— 272 с. — // Изд-во «Лань» : ЭБС. - <URL:http://e.lanbook.com*
3	***Дерр, Василий Яковлевич***. *Функциональный анализ. Лекции и упражнения : учебное пособие для бакалавров : [для студ. вузов, обуч. по специальности высш. проф. образования 010101 "Математика" и направления подготовки высш. проф. образования "Математика", 010200 "Математика. Прикладная математика"] / В.Я. Дерр .— Москва : Юрайт, 2012 .— 463, [1] с. — (Бакалавр) .— Библиогр.: с.460-461.*

б) дополнительная литература:

№ п/п	*Источник*
4	***Кашин, Борис Сергеевич***. *Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян .— М. : Наука : Физматлит, 1984 .— 495 с.*
5	***Бари, Нина Карловна***. *Тригонометрические ряды / Н.К. Бари ; Под ред. П.Л. Ульянова .— М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961 .— 936 с.*
6	***Треногин, Владилен Александрович***. *Функциональный анализ : учебник для студ., обуч. по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / В. А. Треногин .— Изд. 4-е, испр. — М. : Физматлит, 2007 .— 488 с.*
7	***Колмогоров, Андрей Николаевич***. *Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2006 .— 570 с.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
8.	*Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного*

	университета. – (http // [www.lib.vsu.ru/)](http://www.lib.vsu.ru/)
9.	*Google, Yandex, Rambler*
10.	*ЭБС «Университетская библиотека онлайн» ЭБС «Университетская библиотека онлайн»*
11.	*Электронный курс* https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=10082

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1.	*Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. – Новое изд. – М.: МЦНМО, 2017. – 336 с.: ил.*

Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых и дипломных работ.

17. Образовательные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение)

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

Изложение учебного материала основано на принципе системности, преемственности и последовательности и направлено на развитие интеллектуальных умений, профессиональных компетенций, формирование творческой личности высококвалифицированного специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Важнейшая цель преподавателя – систематизация большого объема теоретического материала и обучение студента умению ориентироваться в этом материале.

Рекомендуется использование, как традиционных форм организации лекционного материала, так и внедрение таких интерактивных технологий, как проблемная лекция, когда знания вводятся как «неизвестное», которое необходимо «открыть».

В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460).

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linex, Microsoft Windows 10 Enterprise, LibreOffice 5 (*Writer (текстовый процессор), Math (редактор формул)*), браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

18.Материально - техническое обеспечение дисциплины

Для проведения лекционных и практических занятий используется учебная аудитория: специализированная мебель. Аудитория соответствует действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используется компьютерной класс (ауд.310), оснащенный специализированной оргтехникой, необходимым программным

обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть:
Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://ubuntu.com/download/desktop); Visual Studio Community (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/); LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицен□зия: https://ru.libreoffice.org/about-us/license/); Lazarus (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.lazarus-ide.org/index.php); Free Pascal (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.freepascal.org/faq.html); NetBeans IDE (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://netbeans.org/cddl-gplv2.html); Python 2/3 (Python Software Foundation License (PSFL), бесплатное и/или свободное ПО, лицен□зия: https://docs.python.org/3/license.html); 46 Gimp (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.gimp.org/about/); Inkscape (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://inkscape.org/about/license/); MiKTeX (Free Software Foundation (FSF), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://miktex.org/copying); TeXstudio (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://texstudio.org/); Maxima (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: http://maxima.sourceforge.net/faq.html); Denwer (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: http://www.denwer.ru/faq/other.html); 1С: Предприятие 8 (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://v8.1c.ru/predpriyatie/questions_licence.htm); Foxit Reader (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия https://www.foxitsoftware.com/pdf reader/eula.html); Deductor Academic (Academic Free License, бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://basegroup.ru/system/files/documentation/licence-deductor-academic-20160322.pdf); WinDjView (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://windjview.sourceforge.io/ru/); 7-Zip (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.7-zip.org/license.txt); Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.mozilla.org/en-US/MPL/); VMware Player (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.vmware.com/download/open_source.html); VirtualBox (GNU General Public License (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.virtualbox.org/wiki/Licensing_FAQ); Astra Linux Common Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://dl.astralinux.ru/astra/stable/orel/); PostgreSQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.postgresql.org/about/licence/); GeoGebra (бесплат□ное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.geogebra.org/license); R (бесплатное и/или сво□бодное ПО, лицензия: https://www.r-project.org/Licenses/); Wing-101 (бесплатное и/или свобод□ное ПО, лицензия: https://wingware.com/license/wing101); Loginom Community Edition (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://loginom.com/platform/pricing); MySQL (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия)

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Пространства последовательностей	ПК-1.	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Устный опрос

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
2.	Пространства функций	ПК-1.	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Устный опрос. Реферат
3.	Свойства рядов Радемахера	ПК-1.	ПК-1.1, ПК-1.2, ПК-1.3	Устный опрос Индивидуальные задания
Промежуточная аттестация форма контроля – экзамен				Перечень вопросов Тестовые задания

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Вопросы устного опроса

1.Пространства lp.
2.Сепарабельность lp.
3.Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в lp.
4.Пространства L_∞ и Lp, вложения.
5.Подпространства и изоморфизм, подпространства Lp.
6.Дополняемость в Lp подпространства, порожденного дизъюнктной системой функций.
7.Система Радемахера.
8.Неравенство Хинчина (1).
9.Неравенство Хинчина (2).
10.Неравенство Хинчина в пространстве Орлича.
11.Дополняемость в Lp подпространства, порожденного системой Радемахера.
12.Сходимость рядов Радемахера.
13.Расходимость рядов Радемахера.

Темы рефератов

1. Примеры вычисления модуля непрерывности
2. Свойства системы Радемахера.

Примерные индивидуальные задания

1. Пусть $r_n(t)$ – система Радемахера, $0 \ll t \ll 1$, $r_n(t) = sign(sin2^n\sqrt{t})$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ r_n(t)$ сходится почти везде.

2. Пусть $r_n(t)$ – система Радемахера, $0 \ll t \ll 1$, $r_n(t) = sign(sin2^n\sqrt{t})$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ расходится почти везде.

3. Доказать, что коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ положительны.

4. Пусть $x_n^k(t), n = 0,1$; $1 \ll k \ll 2^n$; $x_0^0(t) = 1, \Delta_n^k = (\frac{k_{-1}}{2^n}, \frac{k}{2^n})$; $0 \ll t \ll 1$

$$x_n^k(t) = \left\{ \begin{matrix} 2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k-1} \\ -2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k} \\ 0, \text{для остальных } t\epsilon[0,1] \end{matrix} \right\}$$

$$x_n^k(t) = \left\{ \begin{matrix} 2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k-1} \\ -2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k} \\ 0, \text{для остальных } t\epsilon[0,1] \end{matrix} \right\}$$

Доказать, что ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right|$ сходится в каждой точке.

5. Пусть $x_n^k(t), n = 0,1\,; 1 \ll k \ll 2^n\,; x_0^0(t) = 1, \Delta_n^k = (\frac{k_{-1}}{2^n}, \frac{k}{2^n})\,; 0 \ll t \ll 1$

$$x_n^k(t) = \left\{ \begin{matrix} 2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k-1} \\ -2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k} \\ 0, \text{для остальных } t\epsilon[0,1] \end{matrix} \right\}$$

Доказать, что ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \frac{1}{t^2}$ не существует.

6. Пусть $x_n^k(t), n = 0,1\,; 1 \ll k \ll 2^n\,; x_0^0(t) = 1, \Delta_n^k = (\frac{k_{-1}}{2^n}, \frac{k}{2^n})\,; 0 \ll t \ll 1$

Доказать, что коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \sin(2\pi t)$ знакопеременны.

Описание технологии проведения

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением опросов по теоретическому материалу, проверкой рефератов, выполнением индивидуальных заданий, содержащих задачи на доказательство.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

Требования к выполнению заданий (шкалы и критерии оценивания)

При проведении текущего контроля успеваемости используются следующие **показатели:**

1) знание основных понятий и определений;
2) умение использовать стандартные методы для решения типовых задач;
3) оптимальность хода решения;
4) логика изложения, рассуждений.

Шкала оценивания:

Зачтено: выполнение заданий и ответы в ходе опроса соответствуют перечисленным показателям, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует умение решать задачи, проводить доказательства, возможно с некоторыми ошибками.

Не зачтено: в ходе опроса ответы обучающегося не соответствуют ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или их отсутствие.

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины и проводится в форме экзамена.

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Перечень вопросов к экзамену

1. Пространства lp.
2. Сепарабельность lp.
3. Неравенство Гёльдера, общий вид линейного функционала в lp.
4. Пространства L_∞ и Lp, вложения.
5. Подпространства и изоморфизм, подпространства Lp.
6. Дополняемость в Lp подпространства, порожденного дизъюнктной системой функций.
7. Система Радемахера.
8. Неравенство Хинчина (1).
9. Неравенство Хинчина (2).
10. Неравенство Хинчина в пространстве Орлича.
11. Дополняемость в Lp подпространства, порожденного системой Радемахера.
12. Сходимость рядов Радемахера.
13. Расходимость рядов Радемахера.

Тестовые задания

1)Пусть $r_n(t)$ – система Радемахера, $0 \ll t \ll 1$, $r_n(t) = sign(sin2^n\sqrt{t})$

7. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ r_n(t)$ сходится почти везде*
8. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ r_n(t)$ расходится почти везде*
9. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ r_n(t)$ расходится на множестве положительной меры*

Ответ: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ r_n(t)$ сходится почти везде. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^2 < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ r_n(t)$ сходится почти везде.

1. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ сходится почти везде*
2. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ расходится почти везде*
3. *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ сходится на множестве положительной меры*

Ответ: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ расходится почти везде. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}})^2 < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $r_n(t)$ расходится почти везде.

1. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ положительны
2. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ отрицательны
3. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ не существуют

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ положительны. Так как функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ убывают на (0,1], то ее коэффициенты Фурье $c_n(x)$ убывают.

1. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{t}$ положительны
2. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{t}$ отрицательны
3. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{t}$ не существуют

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{t}$ не существуют. Так как функция $x(t) = \frac{1}{t}$ не суммируема, то ее коэффициенты Фурье не существуют.

1. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \begin{Bmatrix} 0,\ 0 \ll t \ll \frac{1}{4} \\ 2,\ \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \\ -2,\ \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$ положительны
2. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \begin{Bmatrix} 0,\ 0 \ll t \ll \frac{1}{4} \\ 2,\ \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \\ -2,\ \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$ отрицательны
3. Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \begin{Bmatrix} 0,\ 0 \ll t \ll \frac{1}{4} \\ 2,\ \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \\ -2,\ \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$ знакопеременны

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Радамахера функции $x(t) = \begin{Bmatrix} 0,\ 0 \ll t \ll \frac{1}{4} \\ 2,\ \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \\ -2,\ \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \end{Bmatrix}$ знакопеременны. Так как $x(t) = r_1(t) - r_2(t)$, то $C_n(t) = \begin{Bmatrix} 1, n = 1 \\ -1, n = 2 \\ 0, n > 2 \end{Bmatrix}$.

2)Пусть $x_n^k(t), n = 0{,}1$; $1 \ll k \ll 2^n$; $x_0^0(t) = 1, \Delta_n^k = (\frac{k_{-1}}{2^n}, \frac{k}{2^n})$; $0 \ll t \ll 1$

$$x_n^k(t) = \begin{Bmatrix} 2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k-1} \\ -2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k} \\ 0, \text{для остальных } t\epsilon[0,1] \end{Bmatrix}$$

1. Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right|$ сходится почти везде
2. Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right|$ сходится в каждой точке
3. Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right|$ расходится почти везде

Ответ: Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \left|t - \frac{1}{2}\right|$ сходится в каждой точке. Так как функция $\left|t - \frac{1}{2}\right|$ непрерывна на [0,1], ряд Фурье сходится в каждой точке.

1. Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \frac{1}{t^2}$ сходится почти везде
2. Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \frac{1}{t^2}$ сходится в каждой точке
3. Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \frac{1}{t^2}$ не существует

Ответ: Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \frac{1}{t^2}$ не существует. Так как функция $\frac{1}{t^2}$ не суммируема, то ряд Фурье не существует.

1. Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = t$ положительны
2. Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = t$ отрицательны
3. Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = t$ знакопеременны

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = t$ отрицательны. Так как функция $x(t) = t$ монотонно возрастает, то все ее коэффициенты Фурье (кроме нулевого) отрицательны.

1. Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \sin(2\pi t)$ положительны
2. Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \sin(2\pi t)$ отрицательны
3. Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \sin(2\pi t)$ знакопеременны

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t) = \sin(2\pi t)$ знакопеременны. Так как функция $x(t) = \sin(2\pi t)$ возрастает на $[0, \frac{1}{4}]$ и убывает на $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, то ее коэффициенты Фурье положительны и отрицательны.

Примерное содержание контрольно-измерительного материала

Билет 1.

1. Модуль непрерывности.
2. Выполнение тестового задания.

Примерный ответ на первый вопрос:

Модуль непрерывности - одна из основных характеристик непрерывных функций. Н. м. непрерывной на отрезке функции $f(x)$ определяется как

$$\omega(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_{x} |f(x+h) - f(x)|.$$

Определение Н. м. введено А. Лебегом (A. Lebesgue) в 1910, хотя по существу понятие было известно и ранее. Если Н. м. функции $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\omega(\delta, f) \leqslant M\delta^{\alpha},$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *Липшица условию* порядка α.

Для того чтобы неотрицательная функция $\omega(\delta)$ была Н. м. некоторой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы она обладала следующими свойствами: $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta)$ не убывает, $\omega(\delta)$ непрерывна, $\omega(\delta + \eta) \leqslant \omega(\delta) + \omega(\eta)$, $\delta, \eta > 0$.

Рассматриваются также Н. м. высших порядков

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_{x} |\Delta_h^k f(x)|,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i f(x+ih)$$

- конечная разность k-го порядка функции f(x), иН. м. в произвольных пространствах функций, например, интегральный Н. м. функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[a, b]$ со степенью $p \geqslant 1$

$$\omega^{(p)}(\delta, f) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\{ \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}. \quad (*)$$

Для 2π-периодической функции интеграл в выражении (*) берется по отрезку [0, 2π].

Билет 2.

1. Система Радемахера.
2. Выполнение тестового задания.

Примерный ответ на первый вопрос:

Система Радемахера - ортонормированная на отрезке [0,1] система $\{r_k(x)\}$. Введена X. Радемахером . Функции $r_k(x)$ можно определить равенствами

$r_k(x) = \operatorname{sign} \sin 2^k \pi x$, $x \in [0, 1]$, $k = 1, 2,$ ...

Другое определение функций Радемахера $r_k(x)$ получается путем рассмотрения двоичных разложений чисел отрезка [0,1]: если в двоичном разложении числа хна k-м месте стоит цифра 0, то полагают $r_k(x)=1$, если же на k-м месте стоит 1, то $r_k(x)=-1$; в случае же, когда x=0 или число x допускает два разложения, полагают $r_k(x)=0$. Согласно этому определению отрезок [0,1] распадается на 2^k равных подинтервала, в каждом из которых функция $r_k(x)$ принимает попеременно значения +1 и -1, а на концах подинтервалов $r_k(x)=0$

Система $\{r_k(x)\}$ представляет типичный пример стохастически независимых функций и имеет применения как в теории вероятностей, так и в теории ортогональных рядов.

Одно из важных свойств Р. с. устанавливается теоремой Радемахера: если $\sum c_k^2 < +\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ сходится почти всюду на [0,1], и теоремой Хинчина-Колмогорова: если $\sum c_k^2 = +\infty$, то ряд $\sum c_k r_k(x)$ расходится почти всюду на [0,1].

Так как функции Радемахера в двоично иррациональных точках интервала [0,1] принимают лишь значения ±1, то рассмотрение ряда $\sum c_n r_n(x)$ означает, что у членов ряда $\sum c_n$ выбирается распределение знаков ±1, зависящее от точки *x.* Если x=0, a_1 a_2. .

. a_n . . .- представление числа $x \in [0,1]$ в виде бесконечной двоичной дроби, то при a_n=0 перед c_n ставится знак + и при a_n=1 ставится знак - .

Вышеприведенные теоремы в терминах теории вероятностей означают, что если $\sum c_n^2 < +\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$ сходится для почти всех распределений знаков (сходится с вероятностью 1), и если $\sum c_n^2 = +\infty$, то ряд $\sum \pm c_n$ расходится для почти всех распределений знаков (расходится с вероятностью 1).

Наоборот, ряд теорем теории вероятностей можно сформулировать в терминах функций Радемахера. Например, теорема Кантелли о том, что при игре "в герб и решетку" со ставкой 1 средний выигрыш с вероятностью 1 стремится к нулю, означает, что почти всюду на [0,1] выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} r_k(x) = 0$$

Описание технологии проведения

Промежуточная аттестация (экзамен) проводится в формате собеседования с преподавателем по билетам. Обучающийся получает один теоретических вопрос на знание понятий и определений, формулировок и доказательств теорем и тестовое задание. Оценивание ответа производиться по пятибалльной шкале.

Время подготовки к ответу не должно превышать одного академического часа. При необходимости, в ходе ответа преподаватель может задавать уточняющие и дополнительные вопросы.

Требования к выполнению заданий, шкалы и критерии оценивания

При проведении промежуточной аттестации используются следующие **показатели:**

1) знание основных понятий, определений и свойств математических объектов;
2) корректность формулировок утверждений и теорем;
3) логика рассуждений в ходе доказательства;
4) умение решать задачи вычислительного и теоретического характера.

Критерии оценивания	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, применять теоретические знания для решения практических задач	Повышенный уровень	отлично
Обучающийся владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), допускает не значительные ошибки при ответе.	Базовый уровень	хорошо
Обучающийся владеет частично теоретическими основами дисциплины, фрагментарно способен дать ответ .	Пороговый уровень	Удовлетворите-льно
Обучающийся демонстрирует отрывочные,	–	Неудовлетвори-

фрагментарные знания, допускает грубые ошибки,		тельно

20.3. Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1) Пусть $r_n(t)$ – система Радемахера, $0 \ll t \ll 1$, $r_n(t) = sign(sin2^n\sqrt{t})$

- *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ r_n(t)$ сходится почти везде*
- *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ r_n(t)$ расходится почти везде*
- *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ r_n(t)$ расходится на множестве положительной меры*

Ответ: Ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}\ \mathrm{r_n}(\mathrm{t})$ сходится почти везде. Так как $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}(\frac{1}{\mathrm{n}})^2 < \infty$, то ряд $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}}\ \mathrm{r_n}(\mathrm{t})$ сходится почти везде.

- *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ сходится почти везде*
- *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ расходится почти везде*
- *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ сходится на множестве положительной меры*

Ответ: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ r_n(t)$ расходится почти везде. Так как $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}})^2 < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $r_n(t)$ расходится почти везде.

- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ положительны
- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ отрицательны
- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ не существуют

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ положительны. Так как функции $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ убывают на (0,1], то ее коэффициенты Фурье $c_n(x)$ убывают.

- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{t}$ положительны
- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{t}$ отрицательны
- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{t}$ не существуют

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \frac{1}{t}$ не существуют. Так как функция $x(t) = \frac{1}{t}$ не суммируема, то ее коэффициенты Фурье не существуют.

- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \left\{\begin{matrix} 0, & 0 \ll t \ll \frac{1}{4} \\ 2, & \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \\ -2, & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \end{matrix}\right\}$ положительны
- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t) = \left\{\begin{matrix} 0, & 0 \ll t \ll \frac{1}{4} \\ 2, & \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \\ -2, & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \end{matrix}\right\}$ отрицательны

- Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t)=\begin{cases}0,\ 0\ll t\ll\frac{1}{4}\\ 2,\ \frac{1}{4}<t<\frac{1}{2}\\ -2,\ \frac{1}{2}<t<\frac{3}{4}\end{cases}$ знакопеременны

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Радемахера функции $x(t)=\begin{cases}0,\ 0\ll t\ll\frac{1}{4}\\ 2,\ \frac{1}{4}<t<\frac{1}{2}\\ -2,\ \frac{1}{2}<t<\frac{3}{4}\end{cases}$ знакопеременны. Так как $x(t)=r_1(t)-r_2(t)$, то $C_n(t)=\begin{cases}1, n=1\\ -1, n=2\\ 0, n>2\end{cases}$.

2)Пусть $x_n^k(t), n=0,1$; $1\ll k\ll 2^n$; $x_0^0(t)=1, \Delta_n^k=(\frac{k_{-1}}{2^n},\frac{k}{2^n})$; $0\ll t\ll 1$

$$x_n^k(t)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k-1}\\ -2^{\frac{n}{2}}, t\epsilon\Delta_{n+1}^{2k}\\ 0,\text{для остальных } t\epsilon[0,1]\end{cases}$$

- Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\left|t-\frac{1}{2}\right|$ сходится почти везде
- Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\left|t-\frac{1}{2}\right|$ сходится в каждой точке
- Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\left|t-\frac{1}{2}\right|$ расходится почти везде

Ответ: Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\left|t-\frac{1}{2}\right|$ сходится в каждой точке. Так как функция $\left|t-\frac{1}{2}\right|$ непрерывна на [0,1], ряд Фурье сходится в каждой точке.

- Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\frac{1}{t^2}$ сходится почти везде
- Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\frac{1}{t^2}$ сходится в каждой точке
- Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\frac{1}{t^2}$ не существует

Ответ: Ряд Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\frac{1}{t^2}$ не существует. Так как функция $\frac{1}{t^2}$ не суммируема, то ряд Фурье не существует.

- Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t)=t$ положительны
- Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t)=t$ отрицательны
- Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t)=t$ знакопеременны

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t)=t$ отрицательны. Так как функция $x(t)=t$ монотонно возрастает, то все ее коэффициенты Фурье (кроме нулевого) отрицательны.

- Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\sin(2\pi t)$ положительны
- Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\sin(2\pi t)$ отрицательны
- Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\sin(2\pi t)$ знакопеременны

Ответ: Коэффициенты Фурье по системе Хоара функции $x(t)=\sin(2\pi t)$ знакопеременны. Так как функция $x(t)=\sin(2\pi t)$ возрастает на $[0,\frac{1}{4}]$ и убывает на $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, то ее коэффициенты Фурье положительны и отрицательны.